מועד א', סמסטר חורף תשפ"ב - אלגברה 1/מ, 104016
10.2.22

פתרונות מלאים

ת"ז :

פקולטה :

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רישמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **מחברות הטיוטה לא יאספו ולא יבדקו.**
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
  בשאלות 4-8 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8

	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (20 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י :

$$T(a,b,c,d,e)=\begin{pmatrix} a+2b & a+2b+3d \\ 2a+4b & 2a+4b+3d \end{pmatrix}$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ג. (4 נק') מצאו מטריצה בתמונה של T שהיא הפיכה או הסבירו מדוע מטריצה כזו לא קיימת.

ד. (6 נק') האם קיימת העתקה $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^3$ כך שההעתקה $S\circ T$ היא **על**? אם כן מצאו דוגמא להעתקה S כזו, ואם לא אז הסבירו מדוע לא קיימת.

<u>פתרון שאלה 1:</u>

א. נפתור ממ"ל הומוגנית :

$$T(a,b,c,d,e)=\begin{pmatrix} a+2b & a+2b+3d \\ 2a+4b & 2a+4b+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ a+2b+3d=0 \\ 2a+4b=0 \\ 2a+4b+3d=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow Ker(T)=\left\{(a,b,c,d,e)\,\middle|\, a=-2b\ ,\ d=0\right\}=$$

$$\left\{(-2b,b,c,0,e)\,\middle|\, b,c,e\in\mathbb{R}\right\}=sp\left\{(-2,1,0,0,0)\ ,\ (0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1)\right\}$$

קיבלנו שהגרעין נפרש ע"י 3 בת"ל לכן : $\dim Ker(T)=3$ ובסיס :

$$B_{Ker(T)}=\left\{(-2,1,0,0,0)\ ,\ (0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1)\right\}$$

ב. לפי משפט המימדים השני, $\dim \operatorname{Im} T=\dim\mathbb{R}^5-\dim Ker(T)=5-3=2$.

נוציא סקלרים מהאיבר הכללי לתמונה ונבחר שניים בת"ל שיהוו בסיס :

$$T(a,b,c,d,e)=\begin{pmatrix} a+2b & a+2b+3d \\ 2a+4b & 2a+4b+3d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי המטריצה הראשונה והשלישית הן בת"ל ולכן בסיס לתמונה: $B_{\operatorname{Im}(T)}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$

ג. שתי המטריצות בתמונה, הנמצאות בבסיס שבחרנו הן מדרגה 1 ולכן לא הפיכות. ניקח את הסכום שלהן, שגם היא מטריצה בתמונה (כי התמונה היא מרחב וקטורי לכן סגורה לחיבור), :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. זו מטריצה בתמונה מדרגה 2 (שורות לא פרופ') ולכן הפיכה.

ד. לא קיימת העתקה כזו. נבחין כי $S\circ T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$, לכן העתקה זו היא על, אם"ם מימד התמונה של $S\circ T$ הוא 3. מדוע זה לא יתכן?

נימוק 1 : יהי $v\in Ker(T)$ אז $T(v)=0$. נפעיל S ונקבל : $S(T(v))=S(0)=0$ ולכן $v\in Ker(ST)$ ולכן $Ker(T)\subseteq Ker(ST)$ ולכן $\dim Ker(ST)\ge \dim Ker(T)=3$ לכן לפי משפט המימדים השני : $\dim \operatorname{Im}\left(S\circ T\right)=\dim\mathbb{R}^5-\dim Ker(S\circ T)\le 5-3=2<\dim\mathbb{R}^3$

ולכן לכל העתקה $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^3$ נקבל שההעתקה $S\circ T$ היא **לא על**.

נימוק 2: למציאת קבוצה פורשת לתמונה נפעיל את $S\circ T$ על בסיס של $\mathbb{R}^5$. תחילה נפעיל את T ונקבל קבוצה פורשת לתמונה של T. ומימד התמונה של T הוא 2, לכן נקבל שמתוך ה- 5 תמונות רק 2 הן בת"ל. עתה, נפעיל עליהן את S ונקבל קבוצה פורשת לתמונה של $S\circ T$ ממימד לכל היותר 2, ולא 3 בת"ל ולכן לכל העתקה $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^3$ נקבל שההעתקה $S\circ T$ היא **לא על**. הסיבה שהמימד הוא לכל היותר 2 היא שאם $\{T(v_1),...,T(v_k)\}$ בת"ל אז גם $\{v_1,...,v_k\}$ בת"ל. לכן לו היו 3 תמונות בת"ל אז גם היו 3 מקורות בת"ל וזו סתירה לכך שמימד התמונה של T הוא 2.

<u>שאלה מס' 2</u> : (24 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}5&0&-1\\1&4&-1\\-1&0&5\end{pmatrix}$$

א. (4 נק') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי.

ב. (8 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$.

ג. (4 נק') האם קיימים סקלרים $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$ כך שהמטריצה A דומה למטריצה $B=\begin{pmatrix}4&\alpha&\gamma\\0&\alpha&\beta\\0&0&\beta\end{pmatrix}$? אם כן, מצאו את הסקלרים. אם לא, הסבירו מדוע הם לא קיימים.

ד. (4 נק') תהי $E=A-3I$. הוכיחו כי E הפיכה, וכתבו את E^{-1} כצירוף לינארי של I,E,E^2.

ה. (4 נק') תהי $C=E^2-E-2I$. חשבו את: $\det\left(C^3E^{-1}\right)$.

<u>פתרון שאלה 2:</u>

א. נמצא פולינום אופייני:

$$\begin{vmatrix}\lambda-5&0&1\\-1&\lambda-4&1\\1&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-4)\left[(\lambda-5)(\lambda-5)-1\right]=(\lambda-4)\left[\lambda^2-10\lambda+25-1\right]=(\lambda-4)^2(\lambda-6)$$

קיבלנו ערכים עצמיים: $\lambda_1=4$ מריבוי אלגברי 2. $\lambda_2=6$ מריבוי אלגברי 1.

ב. נמצא וקטורים עצמיים:

עבור $\lambda_1=4$ נפתור: $(4I-A)\overline{x}=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\-1&0&1&0\\1&0&-1&0\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\quad\{a-c=0$$

$$(a,b,c)=(a,b,a)=a(1,0,1)+b(0,1,0)$$

$$B_{V_1}=\{(1,0,1),\ (0,1,0)\}$$

קיבלנו מימד מרחב פתרונות הוא 2 ולכן ריבוי גיאומטרי של $\lambda_1=4$ הוא 2 כמו הריבוי האלגברי.

עבור $\lambda_2=6$ נפתור: $(6I-A)\overline{x}=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\-1&2&1&0\\1&0&1&0\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\quad\begin{cases}a+c=0\\b+c=0\end{cases}$$

$$(a,b,c)=(-c,-c,c)=c(-1,-1,1)$$

$$B_{V_2}=\{(-1,-1,1)\}$$

קיבלנו מימד מרחב פתרונות הוא 1 ולכן ריבוי גיאומטרי של $\lambda_2 = 6$ הוא 1 כמו הריבוי האלגברי.
לכל ערך עצמי ריבוי אלגברי שווה ריבוי גיאומטרי ולכן A לכסינה ומתקיים:

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\ ,\ D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

ג. המטריצה B משולשת עליונה ולכן הערכים העצמיים שלה הם איברי האלכסון ולכן $\alpha,\beta\in\{4,6\}$. נניח $\alpha=4\ ,\ \beta=6$. במקרה זה נקבל:

$$B=\begin{pmatrix}4&4&\gamma\\0&4&6\\0&0&6\end{pmatrix}$$

נבדוק האם קיימת γ כך שהריבוי הגיאומטרי של 4 הוא 2:

$$n-r(\$I-B)=3-r\begin{pmatrix}0&4&\gamma\\0&0&6\\0&0&2\end{pmatrix}=3-2=1$$

ניתן לראות כי לכל γ הדרגה 2 ולכן הריבוי הגיאומטרי 1 ולכן לא לכסינה ולא דומה ל- A.
נניח $\alpha=6\ ,\ \beta=4$. במקרה זה נקבל:

$$B=\begin{pmatrix}4&6&\gamma\\0&6&4\\0&0&4\end{pmatrix}$$

נבדוק האם קיימת γ כך שהריבוי הגיאומטרי של 4 הוא 2:

$$n-r(4I-B)=3-r\begin{pmatrix}0&6&\gamma\\0&2&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי עבור $\gamma=12$ הדרגה היא 1 ולכן הריבוי הגיאומטרי 2 ולכן B לכסינה ודומה ל- A.

ד. הערכים העצמיים של E הם: $\{4-3,4-3,6-3\}=\{1,1,3\}$. מאחר ו- 0 לא ערך עצמי של E, הרי ש- E הפיכה. הפולינום האופייני של E הוא:

$$(\lambda-1)^2(\lambda-3)=(\lambda-3)(\lambda^2-2\lambda+1)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda-3$$

לפי קיילי המילטון E מאפסת את הפולינום האופייני: $E^3-5E^2+7E-3I=0$ לכן:
$E^3-5E^2+7E=3I$. נוציא E ונחלק ב- 3: $E\left(\frac{1}{3}E^2-\frac{5}{3}E+\frac{7}{3}I\right)=I$ ולכן
$E^{-1}=\frac{1}{3}E^2-\frac{5}{3}E+\frac{7}{3}I$.

ה. המטריצות ריבועיות ולכן לפי חוקי דטרמיננטה נקבל: $\left|C^3E^{-1}\right|=|C|^3|E|^{-1}$.

הדטרמיננטה של E היא מכפלת הערכים העצמיים כלומר: $|E|=1\cdot1\cdot3=3$ לכן $|E|^{-1}=\dfrac{1}{3}$.

עבור המטריצה C, הערכים העצמיים הם: $\{1^2-1-2\ ,\ 1^2-1-2\ ,\ 3^2-3-2\}=\{-2,-2,4\}$.

הדטרמיננטה של C היא מכפלת הערכים העצמיים כלומר: $|C|=(-2)\cdot(-2)\cdot4=16$ לכן
$\left|C^3E^{-1}\right|=|C|^3|E|^{-1}=\dfrac{16^3}{3}$.

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') תהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. אם $rank(A)=n$, אז לכל $c\in\mathbb{R}^m$ למערכת $A\bar{x}=c$ יש פתרון.

הטענה לא נכונה: דוגמא נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ אז $r(A)=2=n$ אבל למערכת $A\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

אין פתרון כי $r\left(A\,|\,b\right)=r\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right)=3>r(A)=2$.

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F, ויהיו $v_1,\dots,v_k,w\in V$. אם $\{v_1-w,\dots,v_k-w\}$ פורשת את V, וגם $w\notin sp\{v_1,\dots,v_k\}$, אז $\{v_1,\dots,v_k\}$ תלויה ליניארית.

הטענה נכונה: אם $\{v_1,\dots,v_k\}$ מכילה את ה- 0 אז היא תלויה ליניארית, וסיימנו,. אם היא לא מכילה את ה- 0 אז $\{v_1,\dots,v_k,w\}$ לא מכילה את ה- 0 (גם $w\neq 0$, אחרת $w=0\in sp\{v_1,\dots,v_k\}$ בסתירה לנתון). מהנתון $\{v_1-w,\dots,v_k-w\}$ פורשת את V ולכן יש ל- V קבוצה פורשת מגודל k ולכן $\dim V\le k$, ולכן הקבוצה $\{v_1,\dots,v_k,w\}$ תלויה ליניארית ללא וקטור ה- 0 ולכן יש בה וקטור שהוא צירוף ליניארי של קודמיו. זה לא w כי נתון $w\notin sp\{v_1,\dots,v_k\}$ ולכן זה אחד מה-v-ים, כלומר $\{v_1,\dots,v_k\}$ תלויה ליניארית.

הוכחה נוספת: מהנתון $\{v_1-w,\dots,v_k-w\}$ פורשת את V ולכן יש ל- V קבוצה פורשת מגודל k ולכן $\dim V\le k$. עתה נניח כי $\{v_1,\dots,v_k\}$ בלתי תלויה ליניארית, אז נובע כי $\dim V\ge k$ (כי יש לפחות k בת"ל ב- V), ולכן $\dim V=k$, ואז $\{v_1,\dots,v_k\}$ בלתי תלויה ליניארית עם מספר וקטורים כמו המימד ולכן בסיס של V, ובפרט פורשת את V, וזה בסתירה לנתון ש- $w\notin sp\{v_1,\dots,v_k\}$ ולכן $\{v_1,\dots,v_k\}$ תלויה ליניארית.

ג. (7 נק') תהי $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי $\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ תת קבוצה של $\mathbb{R}^m$.

אם $\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_k)\}$ פורשת את $\mathbb{R}^n$, אז $\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ פורשת את $\mathbb{R}^m$.

הטענה לא נכונה: דוגמא נגדית: ניקח $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י $T(a,b,c)=(a,b)$. זו העתקה ליניארית. נבחר: $\{v_1=(1,0,0)\ ,\ v_2=(0,1,0)\}$ אז $\mathbb{R}^2=sp\{T(v_1)=(1,0)\ ,\ T(v_2)=(0,1)\}$

אבל $\{v_1=(1,0,0)\ ,\ v_2=(0,1,0)\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ד. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. אם v_1,v_2 הם וקטורים עצמיים של שני ערכים עצמיים שונים $\lambda_1\neq\lambda_2$, אז v_1+v_2 הוא לא וקטור עצמי של T.

הטענה נכונה: נתון: $T(v_1)=\lambda_1 v_1$, $T(v_2)=\lambda_2 v_2$ כאשר $\lambda_1\neq\lambda_2$. נניח בשלילה ש: v_1+v_2 הוא כן וקטור עצמי של T, אז קיים λ_3, כך ש: $T(v_1+v_2)=\lambda_3(v_1+v_2)$. מלינאריות של T נקבל: $T(v_1)+T(v_2)=\lambda_3(v_1+v_2)$. נציב את הנתון: $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=\lambda_3(v_1+v_2)$. נעביר אגפים ונכנס איברים דומים: $(\lambda_1-\lambda_3)v_1+(\lambda_2-\lambda_3)v_2=0$. אבל v_1,v_2 הם וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים ולכן הם בת"ל, כלומר כל הסקלרים אם 0 כלומר: $\lambda_1-\lambda_3=0$, $\lambda_2-\lambda_3=0$ כלומר: $\lambda_2=\lambda_3$, $\lambda_1=\lambda_3$ ולכן, $\lambda_1=\lambda_2$, בסתירה לנתון.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 4</u> : (5 נקודות)

יהי $z=\sqrt{3}+i$ נתון ש- $|w|=2|z|$ וכן $\arg\left(\frac{zw}{-1-i}\right)=135^\circ$. אזי:

א. $w=2+2\sqrt{3}i$.

ב. $w=4i$.

ג. $w=2\sqrt{3}-2i$.

ד. $w=-4i$.

ה. $w=2\sqrt{3}+2i$.

<u>פתרון שאלה 4:</u>

יהי $|z|=\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{4}=2$ וכן: $\arg(z)=\arg(\sqrt{3}+i)=30^\circ$ (רביע ראשון).

לכן: $|w|=2|z|=2\cdot 2=4$, נסמן: $w=4cis\theta$ ונמצא θ:

$$135^\circ=\arg\left(\frac{zw}{-1-i}\right)=\arg(z)+\arg(w)-\arg(-1-i)=30^\circ+\theta-225^\circ$$

$$\theta=135^\circ-30^\circ+225^\circ=330^\circ$$

$$w=4cis330^\circ=4(\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}-2i$$

סימון נכון: ג'.

<u>שאלה מס' 5</u> : (5 נקודות)

נתונות שתי מטריצות ממשיות מסדר 3×3 הבאות: $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&0&2\\5&0&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&0&4\\7&0&-4\end{pmatrix}$.

יהי U מרחב הפתרונות של $A\bar{x}=0$, יהי W מרחב הפתרונות של $B\bar{x}=0$, אזי:

א. $\mathbb{R}^3=U\oplus Row(B)$.

ב. $\mathbb{R}^3=W+Row(A)$ והסכום הוא לא סכום ישר.

ג. $U=Col(B)$.

ד. $\mathbb{R}^3=U+Row(A)$ והסכום הוא לא סכום ישר.

ה. $W=Col(A)$.

<u>פתרון שאלה 5:</u>

תחילה נמצא את כל המרחבים שבשאלה:

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&0&4\\7&0&-4\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&0&2\\5&0&2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} U=W=\{(0,b,0)\mid b\in\mathbb{R}\}=sp\{(0,1,0)\} \\ Row(A)=Row(B)=\{(a,0,c)\mid a,c\in\mathbb{R}\}= \\ =sp\{(1,0,0),(0,0,1)\}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^t=\begin{pmatrix}1&5&7\\0&0&0\\0&4&-4\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&12\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \\ B^t=\begin{pmatrix}3&2&5\\0&0&0\\0&2&2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} Col(A)=\{(a,b,12a-b)\mid b\in\mathbb{R}\}=sp\{(1,0,12),(0,1,-1)\} \\ Col(B)=\{(c,d,c+d)\mid a,c\in\mathbb{R}\}=sp\{(1,0,1),(0,1,1)\}\end{array}$$

מהתוצאות שקיבלנו, רק א' נכון.

סימון נכון: א'.

<u>שאלה מס' 6</u>: (5 נקודות)

יהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י: $T(v)=Av$, כאשר $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$.

נתון כי: $Ker(T)\subsetneq Ker(T^2)\subsetneq\mathbb{R}^3$ (כולן הכלות ממש) אזי:

א. $rank(A)+rank(A^2)=4$.

ב. $rank(A)+rank(A^2)=3$.

ג. $rank(A)+rank(A^2)<3$.

ד. $rank(A)<rank(A^2)$.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

(**הערה**: עבור מטריצה C: $Row(C)$ מסמן את מרחב השורות של C, ו- $Col(C)$ את מרחב העמודות).

<u>פתרון שאלה 6:</u>

מהנתון $Ker(T)\subsetneq Ker(T^2)\subsetneq\mathbb{R}^3$ נובע $dimKer(T)<dimKer(T^2)<3$.

$dimKer(T)=0$ אז T אופרטור ליניארי חח"ע ולכן על ולכן הפיך, ולכן גם T^2 הפיך כלומר חח"ע ולכן $Ker(T)=Ker(T^2)$ בסתירה לנתון. לכן בהכרח $dimKer(T)=1$, $dimKer(T^2)=2$.

בנוסף, לפי משפט המימדים השני מתקיים:

$$dimKer(T)+dimIm(T)=dimKer(T^2)+dimIm(T^2)=3$$

ולכן $dimIm(T)=2\ ,\ dimIm(T^2)=1$. המטריצה A היא מטריצה מייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ ולכן $r(A)=dimIm(T)=2\ ,\ r(A^2)=dimIm(T^2)=1$ כלומר:

$rank(A)+rank(A^2)=3$.

סימון נכון: ב'.

<u>שאלה מס' 7</u>: (5 נקודות)

יהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ אופרטור לינארי ויהי $B=\{1,1+x\ ,\ 1+x+x^2\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, נתון כי:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&6&3\\1&-5&-3\\0&2&1\end{pmatrix}.$$

אזי $T^{-1}(1+5x-2x^2)$ שווה ל:

א. $2-x$.

ב. $7-8x+14x^2$.

ג. $1-x$.

ד. $13+6x+14x^2$.

ה. $32+33x+12x^2$.

<u>פתרון שאלה 7:</u>

לפי משפט: $\left[T^{-1}\right]_B=[T]_B^{-1}$ לכל בסיס B של V. לכן נחשב את ההופכית.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&6&3&1&0&0\\1&-5&-3&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&6&3&1&0&0\\0&-11&-6&-1&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\underset{R_2+6R_3}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&6&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&6\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\underset{R_3-2R_2}{\to}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&6&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&6\\0&0&1&2&-2&-11\end{array}\right)\underset{R_1-3R_3}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&6&0&-5&6&33\\0&1&0&-1&1&6\\0&0&1&2&-2&-11\end{array}\right)\underset{R_1-6R_2}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-3\\0&1&0&-1&1&6\\0&0&1&2&-2&-11\end{array}\right)$$

לפי משפט: $\left[T^{-1}\right]_B[v]_B=\left[T^{-1}(v)\right]_B$ אבל כאמור: $\left[T^{-1}\right]_B=[T]_B^{-1}$ ולכן: $[T]_B^{-1}[v]_B=\left[T^{-1}(v)\right]_B$.

לכן, נחשב: $[v]_B$ עבור $v=1+5x-2x^2$ ונכפול ב $[T]_B^{-1}$.

$$1+5x-2x^2=-4(1)+7(1+x)-2\left(1+x+x^2\right)$$
$$\left[1+5x-2x^2\right]_B=(-4,7,-2)$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-3\\-1&1&6\\2&-2&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\7\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\left[T^{-1}(v)\right]_B$$
$$T^{-1}(v)=2(1)-(1+x)+0\left(1+x+x^2\right)=1-x$$

סימון נכון: ג'.

<u>שאלה מס' 8</u>: (5 נקודות)

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אזי:

א. אם A ו- B שקולות שורה אז יש להן אותם ערכים עצמיים.

ב. אם A ו- B דומות אז הן שקולות שורה.

ג. אם A ו- B לכסינות אז גם $A-B$ לכסינה.

ד. אם A דומה לקנונית שלה אז $trace(A)=trace(A^2)$.

ה. אם A ו- B דומות לאותה אלכסונית אז $AB=BA$.

<u>פתרון שאלה 8:</u>

נעבור על כל הסעיפים. נדגים את הטענות הלא נכונות עם מטריצות משולשות עליונות בהן הערכים העצמיים הם איברי האלכסון, ונוכיח את הטענה הנכונה. נזכור גם כי אם למטריצה מסדר n יש n ערכים שונים אז היא לכסינה.

א. לא נכון: כל שתי מטריצות הפיכות למשל הן שקולות שורה ושקולות שורה למטריצת היחידה אבל הערכים העצמיים לא בהכרח שווים. למשל: $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$. אז A ו- I שקולות שורה אבל לא אותם ערכים עצמיים.

ב. לא נכון. למשל: $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$. אז A ו- B דומות (כי B היא האלכסונית ש- A דומה לה) אבל הן לא שקולות שורה כי שתיהן מטריצות קנוניות שונות.

ג. לא נכון. למשל: למשל: $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$ לכסינות (ההסבר בסעיף ב') אבל:

$A-B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$ לא לכסינה כי 0 הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי 2 וריבוי גיאומטרי 1.

ד. נכון: אם A דומה לקנונית שלה אז ל- A ולקנונית אותם ערכים עצמיים. אבל מטריצה קנונית היא משולשת עליונה ובאלכסון שלה יש רק 0 ו/או 1 ולכן הערכים העצמיים של A הם 0 או 1.

נניח כי ל- A יש k ערכים עצמיים שהם 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 1$ והשאר 0:

$\lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$ אז $trace(A) = \lambda_1 + ... + \lambda_k + \lambda_{k+1} + ... + \lambda_n = k$. אז עבור A^2, הערכים העצמיים הם: $\lambda_j^2 = \lambda_j$ ולכן $trace(A) = trace(A^2)$.

ה. לא נכון. למשל: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ דומות לאותה אלכסונית $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ אבל:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

סימון נכון: ד'.